L.El Mezzria

A.S :2006/2007

Devoir de Synthèse N°2

Classes 4èmesc

Durée : 3.h

Exercice N°1: (5pts)

$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ étant un repère de l'espace ξ

Soit P et Q les plans d'équations respectives : $x + 2y - z + 1 = 0$ et $x - y - z - 2 = 0$

1/ Montrer que P et Q sont perpendiculaires

2/ a) Donner une équation cartésienne de la sphère de centre I (1 , 2 ,0) et tangente à P

b) Montrer que S et Q sont sécants et caractériser $S \cap Q$

3/ soit $\Delta = P \cap Q$

a) Calculer $d(I,\Delta)$

b) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S' de centre I et tangente à Δ

c) Donner les coordonnées du point de contact de Δ et S'

Exercice N°2: (5pts)

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2+U_n} \end{cases}$$

1/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

b) Montrer que U est décroissante

c) En déduire que U est convergente

2/ Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n}$

a)Montrer que V est une suite géométrique de raison 2

b) Calculer V_n en fonction de n

c) Trouver alors $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

Problème : (10 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $g(x)=x^2+1-\mathrm{Log}x$

1 / Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

2/ En déduire pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$; g(x) > 0

II- Soit f la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{\mathrm{Log}x}{x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$; $\forall\ x\in\left]0,+\infty\right[$

b) Dresser tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite D : y = x + 1 est une asymptote à ζ_f

b) Etudier les positions de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une solution unique α et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

4/ Tracer D , ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

5/ Soit F une primitive de f sur $\left]0,+\infty\right[$

Montrer que $F(e)-F(1)=\dfrac{e^2+2e-2}{2}$